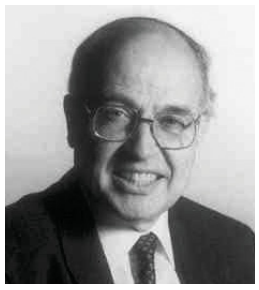
TANTO CON TAN POCAS PALABRAS

Tal y como prometimos la pasada semana, dedicamos esta lámina a introducir y explicar el 'Teorema del Índice', el resultado más importante debido a Atiyah y Singer y por el que recibieron el pasado mes de mayo el Premio Abel. No es una tarea fácil. Como Singer decía en esas fechas en una entrevista, debemos hacer visible la matemática, ya que no podemos hacerla comprensible. Y no le falta razón. El teorema al que nos referimos tiene un nivel abstracto tal que hasta para los matemáticos no es sencillo entender toda su dimensión. Pero lo que sí podemos hacer es mostrar sobre qué versa y cuál es su influencia.

por Lolita Brain



SIR MICHAEL **ATIYAH** **(1929**-)

EL TEOREMA DEL ÍNDICE

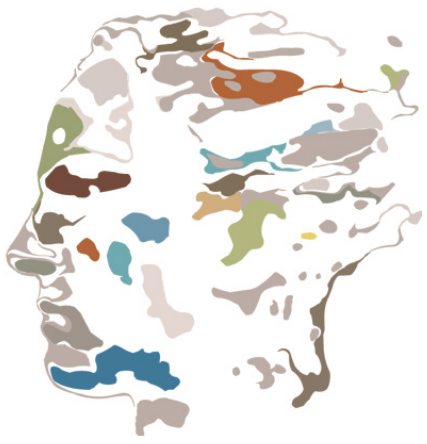
Isadore M. Singer, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, y Michael Atiyah, de la Universidad de Oxford, han sido galardonados en el presente año con el **Premio Abel**, no sólo por la contribución de toda una vida, mejor dos, dedicada a la matemática, sino por su demostración del 'Teorema del Índice', que enunciaron en 1963 y publicaron en 1968. Incomprensible en su expresión hasta para los iniciados, os mostramos cómo se enuncia un teorema de tal importancia. Veámoslo y si no te parece ininteligible, tu futuro está ya escrito.

ISADORE M. **SINGER** (1924-)

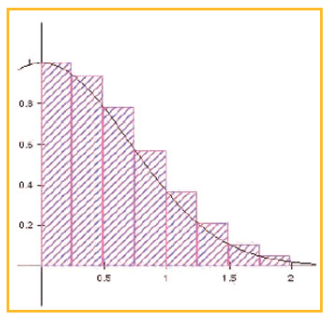
ASÍ SE ESCRIBE UN TEOREMA

SEA P(f)=0 UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES. ENTONCES SE CUMPLE QUE: ÍNDICE ANALÍTICO (P) = ÍNDICE TOPOLÓGICO (P).

Sí, así de simple puede llegar a ser un teorema fundamental de la matemática. Es más, en general, los grandes teoremas se escriben con muy pocas palabras. Palabras que tienen a veces siglos de discusión. Y es que en matemáticas las palabras suelen sobrar: con pocas se dice mucho.



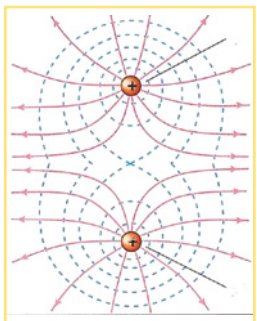
NUDO SIMÉTRICO DE THISTLEHWAITE



EL ANÁLISIS ESTUDIA UN TODO PARTIÉNDOLO EN PEQUEÑOS ELEMENTOS

COMPRENDER LA NATURALEZA

La matemática moderna (desde el siglo XVII) se acerca a la Naturaleza proporcionando **modelos matemáticos** que explican los mecanismos que rigen el comportamiento de un determinado fenómeno físico, químico, biológico, etcétera.



Explicar el campo eléctrico en un determinado lugar del espacio sujeto a una acción eléctrica o determinar cómo se enfría a lo largo del tiempo una barra de metal calentado son fenómenos que tienen explicación con modelos diferenciales. También pueden crearse modelos matemáticos para la distribución del impulso eléctrico que regula los latidos del corazón.

EL MODELO

La forma de dicho modelo suele venir determinada por un conjunto de ecuaciones especiales, denominado **sistema de ecuaciones diferenciales,** que expresan el modo en el que varían las variables de las que depende el fenómeno.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

FAMOSA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MAXWELL PARA EL CAMPO ELÉCTRICO

TOPOLOGÍA VS GEOMETRÍA VS ANÁLISIS

En topología se estudian cómo los objetos tienen una forma determinada o un aspecto espacial. El énfasis se pone en las propiedades globales de la forma más que en la apariencia local de una pequeña parte del objeto, que es la esencia del análisis. Cuando la forma se describe a través de distancias, estamos refiriéndonos en general a la geometría de la forma.

Una vez solucionado un sistema de ecuaciones se puede conocer el fenómeno. La imagen muestra con el mismo color las zonas cercanas al corazón con igual intensidad del campo eléctrico al comienzo de un latido.

LAS SOLUCIONES

Para usar efectivamente el modelo, es preciso hallar las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales. Ésta es una tarea que en muchísimas ocasiones no es posible llevar a cabo por la dificultad del propio modelo. Muchas veces es suficiente saber si el modelo tiene alguna solución, ya que si no tuviera ninguna, el modelo no sería adecuado.

UNA SOLUCIÓN INTERMEDIA

Puede ser, por tanto, igualmente útil conocer la respuesta a la pregunta **¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones diferenciales?,** aun cuando no se puedan encontrar explícitamente aquéllas. Además, no es necesario conocer las soluciones para saber cuántas hay y esta información puede ayudar a hallarlas.

SI HOMER FUERA TOPÓLOGO

La topología, nacida en el siglo XVIII de manos de L. Euler, es la Geometría **sin medidas**. También nos referimos a ella como la "geometría de goma", ya que las figuras que se pueden obtener por deformación y sin rotura -como si estuvieran fabricadas con plastilina- son iguales desde el punto de vista topológico. El género topológico se refiere a los *agujeros* de un objeto. Por ejemplo, una rosquilla y una taza tienen un agujero y además podemos deformar una para obtener la otra. Desde el punto de vista topológico son la misma cosa. Si Homer Simpson fuera topólogo, ¡dudaría entre morder la taza o la rosquilla!

LA RESPUESTA DE ATIYAH-SINGER

Aquí es donde entra en juego el teorema de Atiyah-Singer que relaciona las soluciones del modelo con la **forma** de la región en la que el modelo ocurre. Vincula la realidad **topológica** del modelo con las soluciones del mismo. En términos matemáticos, es lo que vienen a ser el **índice topológico** y el **índice analítico** al que se refiere el famoso teorema.